

УДК 519.651

О ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА ПО ЗНАЧЕНИЯМ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА

Абикенова Ш., Темиргалиев Н., Ажгалиев Ш., Таугынбаева Г.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

В статье в качестве объекта исследования применение преобразования Радона, как одного из видов числовой информации в задачах дискретизации функций из классов Соболева. Основное отличие научной постановки заключается в использовании информации нового типа, ставится задача выяснить характеристики решения задачи в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника, используя преобразование Радона. Последующая вычислительная реализация имеет весьма широкую сферу применения в науке, и в масштабах Казахстана предлагает дальнейшее исследование перспективной тематики, которое реализует новое направление на международном уровне. Результаты получены в рамках грантового финансирования научных исследований на 2018–2020 годы МОН РК (проект AP05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации»).

Ключевые слова. функция, преобразование Радона, класс Соболева, оценка погрешности снизу, оценка погрешности сверху, вычислительный агрегат.

ВВЕДЕНИЕ

Широкий спектр проблем в различных сферах научного знания (астрофизики, физики плазмы, сейсмологии, медицины и т.п.) сводятся к решению обратных задач, что можно продемонстрировать на следующем примере. Требуется представить структуру внутренности некоторого тела. При исследовании внутренней структуры объекта его просвечивают излучением. Просвечивая тело с одного направления, получают плоское (двумерное) теневое изображение трехмерного тела. Просвечивая тело с другого направления, получают другое теневое изображение тела и дополнительную информацию о его внутренней структуре. Просвечивая тело еще с одного направления, получают новую информацию и т.д.

Таким образом, имея достаточный объем числовой информации (изображений с различных направлений), можно с определенной погрешностью восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее функцию плотности поглощения излучения – трехмерную функцию $\mu(x, y, z)$. Отметим, что задача в сформулированной постановке весьма сложна и, по сути, искомый трехмерный объект восстанавливают, представляя в виде набора тонких срезов. Внутри каждого среза плотность μ считают функцией только двух переменных [1].

Здесь, при исследовании систему «источники-детекторы» устраивают таким образом, чтобы регистрировать только данные на лучах, лежащих в плоскости среза, то представлено на схеме сканирования одного слоя (рисунок, а).

Очевидно, что детекторы регистрируют данные и, полученная по ним функция R , зависит от одной переменной s (при фиксированном направлении зондирования, определяемом углом φ). Восстановить по одной проекции $R_\varphi(s)$ функцию двух переменных $\mu(x, y)$ невозможно.

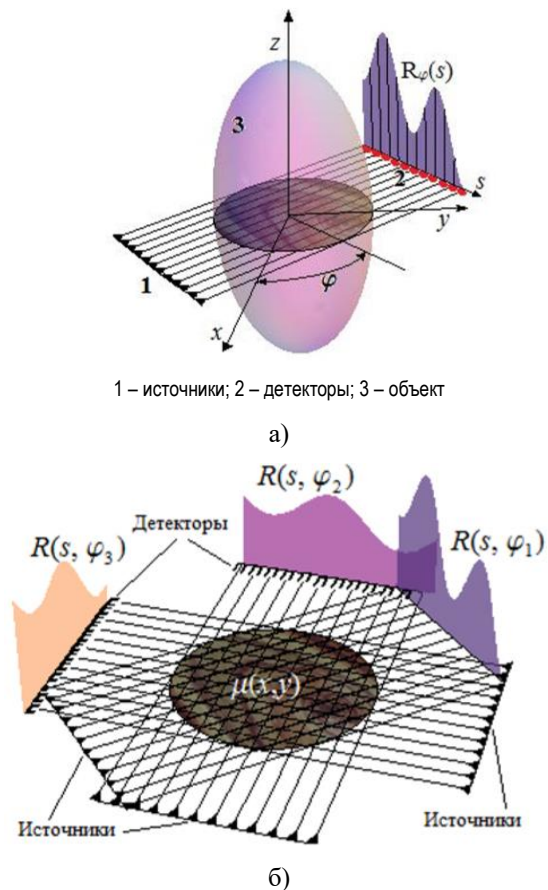


Рисунок. Зондирование трехмерного объекта (а) и схема получения проекций $R(s, \varphi)$ одного слоя (б)

Для того, чтобы получить набор данных, достаточный для восстановления, объект исследуют с различных направлений, варьируя угол φ . Поворачивая систему «источники – детекторы», получают множество проекций $R(s, \varphi)$ слоя (параметр φ обозначает

угол зондирования), по которым можно восстановить двумерную функцию $\mu(x, y)$. Схема сканирования слоя с различных направлений показана на рисунке, б. Определив функцию $\mu(x, y)$ для одного слоя, систему «источники – детекторы» сдвигают в направлении оси z для получения информации о следующем близком слое и т.д. Затем, по двумерным функциям $\mu_{z_i}(x, y)$, в сечениях z_i , где z – координата перпендикулярная сечению, получают трехмерную функцию плотности поглощения $\mu(x, y, z)$. При этом основные трудности возникают при исследовании отдельного слоя, т.е. при восстановлении функции $\mu_{z_i}(x, y)$.

На математическом языке, это восстановление значения функции по известным значениям интегралов от этой функции, вычисленным по элементам некоторого множества поверхностей, т.е. сама функция неизвестна, известно лишь множество интегралов от этой функции, полученных в результате экспериментов.

Эта задача была решена в 1917 г. австрийским математиком И. Радонем для случая интегрирования по прямым линиям на плоскости, т.е. им был предложен метод восстановления (реконструкции) многомерных функций по их интегральным характеристикам, т.е. метод решения обратной задачи интегральной геометрии [2]. Преобразование Радона в задаче восстановления функций используется уже более 100 лет и в 2017 году математической научной общественностью было широко отмечено 100-летие существования преобразования Радона или 100-летие знаменитой публикации «Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten (Об определении функций по их интегральным значениям вдоль некоторых многообразий)», были подготовлены соответствующие научно-исследовательские мероприятия, посвященные его многочисленным применениям [3]. Значимость для ученых (математиков, физиков, инженеров, медиков и т.д.) и влияние на развитие соответствующих научных направлений введение и дальнейшее исследование преобразования Радона, неоспоримо подтверждается разными научными результатами [4–7]. Но несмотря на то, что научные направления по применению преобразования Радона многочисленны и имеют достаточно широкий географический научный охват, научные школы США, Европы (Германия, Дания, Австрия и т.д.), Азии, также России, в Казахстане подобной темой активно не занимаются.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В более широком смысле, приведенную выше постановку научного вопроса можно сформулировать так. При проведении экспериментов (физических, химических, технических и т.п.) важную роль играют два фактора: где разместить измерительные приборы

(в каких точках снимать информацию) и как по полученным данным приближенно описать весь процесс (построение интерполяционной формулы). При этом выяснения требуют вопросы типа «Какими приборами и в каком количестве пользоваться?», «Где эти приборы расставить и как переработать полученные экспериментальные данные?».

Математическим эквивалентом этих положений является предложенный в [8–10] в 1996–2003 гг. **Компьютерный (вычислительный) поперечник**, смысл которого состоит в нахождении наилучшего среди данного класса вычислительных средств в условиях искаженных исходных данных. Данный подход выработан ИТМиНВ и представляет свой уникальный подход к исследованию этой задачи.

В случае $Tf = f$ общая задача в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника есть задача восстановления функций

$$\delta_N(D_N; F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y.$$

Различные постановки задач восстановления функций получаются при различном выборе множества вычислительных агрегатов D , исследованию которых посвящен ряд работ (см. например, [10, 11] и имеющуюся в них литературу). Ранее в контексте К(В)П уже были получены оптимальные результаты в задаче восстановления функции из различных функциональных классов по разной числовой информации.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее представлены полученные в рамках грантового финансирования научных исследований на 2018–2020 годы в текущем году научные результаты (проект АР05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации»), заключающиеся в получении формул (оценка сверху и снизу) приближенного восстановления функций ($Tf = f$) из классов Соболева

$W_p^r(D)$ посредством переработки числовой информации о ней, полученной от функционалов $l_1(f), \dots, l_N(f)$ в виде их значений преобразований Радона, т.е. функционалов следующего типа: $l(f) = \int_p f(z) dz$ – интеграл от функции, взятый вдоль луча. Для полноты изложения напомним определение в случае двух переменных.

Через $D = \{x = (x, y) \in R^2 : x = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ будем везде обозначать единичный круг с центром в начале координат. А через $C = [-1, 1] \times S \equiv \{(p, \theta) : -1 \leq p \leq 1, \theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\}$.

Через Z обозначим множество $[-1, 1]^3$.

Заметим здесь, что множество S можно рассматривать как поверхность в R^3 , которая находится внутри куба Z .

Для функции f , определенной на D , и $(t, \theta) \in C$ преобразованием Радона $R(f; t, \theta)$ называется интеграл от f вдоль отрезка $I := I(t, \theta) = \{(x, y) : x\theta_1 + y\theta_2 = t\} \cap D$, а именно:

$$\begin{aligned} R(f; t, \theta) &:= \int_{I(t, \theta)} f(x, y) ds = \\ &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\theta_1 - s\theta_2, t\theta_1 + s\theta_2) ds. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть $r > 1$ целое число. Тогда справедливо соотношение

$$N^{\frac{-r}{2} + \frac{1}{2}} \ll \delta_N \left(R(f; t, \theta); W_2^r(D) \right)_{L^r(D)} \ll N^{\frac{-r+1}{3} + \frac{1}{2}}.$$

Заметим, что для $r > 1$ верно неравенство

$$\frac{r}{2} > \frac{r+1/2}{3}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное отличие идеи научной задачи заключается в использовании информации нового типа, при этом наибольшее распространение получило восстановление по значениям функции в точках. На практике используются приборы, которые измеряют не значения исследуемой функции, а ее другие характеристики. Например, использование цветных фильтров позволяет получать интенсивность излучения в данном спектре, или математическим языком, значения коэффициентов Фурье. Известно о связи преоб-

разований Фурье и Радона и, одной стороны, постановка задачи дискретизации при помощи коэффициентов Фурье имеет широкое развитие и получены неулучшаемые результаты. Поэтому, с другой стороны, в этой связи, ставится задача выяснить характеристики решения данной задачи, используя преобразование Радона. В Казахстане была поставлена задача К(В)П о нахождении оптимальных порядков восстановления функций и решений дифференциальных уравнений. Для многих конкретных случаев поставленная задача была решена на основе оригинальных методов построения агрегатов приближения вкупе с методами доказательств их неулучшаемости. Планируется нахождение оптимальных порядков задач дискретизации функций по значениям преобразования Радона функций из различных классов. Последующая вычислительная реализация имеет весьма широкую сферу применения в науке и технике, в частности в компьютерной томографии. Таким образом, в масштабах Казахстана предлагается дальнейшее исследование перспективной тематики, которое реализует новое направление на международном уровне. Результаты могут быть использованы в программном обеспечении медицинских, геологических томографов. Например, нахождение оптимального порядка дискретизации преобразования Радона позволит, в медицинской рентгеновской томографии смоделировать неулучшаемую конфигурацию излучателей и, таким образом, минимизировать вредное влияние рентгеновского излучения. Основные результаты Проекта (промежуточные) периодически обсуждались на научных семинарах Института теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хелгасон С. Преобразование Радона. / Пер. с англ. А.Г. Сергеева, под ред. Б.И. Завьялова с предисловием В.С. Владимиров. М.: Мир. 1983. 148 с. [Helgason S. The Radon transform. Birkhäuser. 1980. 192 p.]
2. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse, 69:262–277, 1917.
3. Special issue on 100 years of the Radon transform // Inverse Problems, Volume 33–35
4. Harrison H. Barrett. The Radon Transform and Its Applications. Progress in Optics. Volume 21, 1984, Pages 217–286.
5. В. Г. Романов, Обратные задачи математической физики, Наука, Москва, 1984, 264 с.; V. G. Romanov, Inverse Problems of Mathematical Physics, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
6. Электронное издание на основе: Физика и биофизика : учебник / В. Ф. Антонов, Е. К. Козлова, А. М. Черныш. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013. – 472 с. : ил. - ISBN 978-5-9704-2401-8.
7. Daniel Trad, Tadeusz Ulrych, and Mauricio Sacchi (2003). "Latest views of the sparse Radon transform." GEOPHYSICS, 68(1), 386–399.
8. Н. Темиргалиев, Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье, Вестн. Евразийск. ун-та им. Л.Н. Гумилева, 1997, № 3, 90–144.
9. Н. Темиргалиев, Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье, Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева, 2010, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 1–194.
10. Н. Темиргалиев, Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований, Электронное издание, ИТМиНВ, Астана, 2012.

**СОБОЛЕВ КЛАССЫНАН АЛЫНҒАН ФУНКЦИЯНЫ ОНЫҢ РАДОН
ТҮРЛЕНДІРУІНІҢ МӘНІ БОЙЫНША ЖУЫҚТАУ ЕСЕБІ ТУРАЛЫ**

Ш. Әбікенова, Н. Темірғалиев, Ш. Азғалиев, Ғ. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Мақалада зерттеу объектісі ретінде Соболев классынан алынған функцияларды дискретизациялау есебіндегі сандық мәліметтердің бір түрі – Радон түрлендірулерін қолдану алынған. Ғылыми қойылымның негізгі ерекшелігі жаңа түрдегі сандық мәліметті қолдану болып табылады, сол Радон түрлендіруін қолдана отырып, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мән мәтінінде мәселе шешімінің сипатын анықтау қажет. Бұдан шығатын есептеу нәтижелері ғылымда кең көлемдегі қолданысқа ие, және де халықаралық деңгейдегі жаңа бағытқа шығаратын болашағы зор осы тақырыпты Қазақстан көлемінде ары қарай зерттеу ұсынылады. Нәтиже 2018–2020 жылдардағы ҚР БҒМ ғылыми зерттеулерді қаржыландыру гранты аясында алынған (AP05132938 «Дискретизация есептеріндегі Радон түрлендірулері» жобасы).

Кілт сөздер: функция, Радон түрлендірулері, Соболев классы, төменнен бағалау қателігі, жоғарыдан бағалау қателігі, есептеу агрегаты.

**ON THE PROBLEM OF APPROXIMATE RECONSTRUCTING OF FUNCTIONS
FROM SOBOLEV CLASSES BY VALUES OF THEIR RADON TRANSFORMS**

S. Abikenova, S. Azhgaliyev, G. Taugynbayeva, N. Temirgaliyev

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

In this article we study the application of the Radon transform, as one of the types of numerical information in discretization problems of functions from the Sobolev classes. The main distinction of the scientific statement is the use information of a new type, we state the problem to find out the characteristics of the solution of the reconstructing problem using the Radon transform in the context of the Computational (Numerical) diameter. Subsequent computational implementation has a very wide scope in science, and thus, on the scale of Kazakhstan, proposes further research on promising subjects, which implements a new direction at the international level. The results have been obtained within the framework of the grant financing of scientific research for the years 2018–2020 of the MES RK (project AP05132938 “Radon transform in discretization problems”).

Keywords: function, Radon transforms, Sobolev class, lower bounds of the error, upper bounds of the error, computational aggregates.