

УДК 539.14+533.924.621.38.621.793.519.6

ОБОБЩЕННАЯ КАСКАДНО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОТОКОВ ЧАСТИЦ И ЕЕ СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА

¹⁾ Воронова Н.А., ^{1,2)} Купчишин А.И., ²⁾ Шмыгалева Т.А., ¹⁾ Кирдяшкин В.И., ¹⁾ Купчишин А.А.

¹⁾ *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан*

²⁾ *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

Получено аналитическое решение интегро-дифференциального уравнения каскадного процесса для частиц (выбитых атомов и др.) в трехмерной модели элементарного акта, в которое водит обобщенная каскадно-вероятностная функция (ОКВФ). Показано, что после преобразования Лапласа уравнение переходит в интегральное, которое затем решается методом последовательных приближений. Установлены основные физические свойства этой функции. При постоянстве пробега на взаимодействие и угла вылета частицы после соударения ОКВФ переходит в простейшую КВФ. При малых глубинах регистрации вероятность того, что частица пройдет эту глубину, стремится к нулю (как без соударений, так и при испытании i -взаимодействий). При больших глубинах эти вероятности стремятся к нулю. При большом i ОКВФ переходит в формулу типа Стирлинга. При увеличении пробега взаимодействия вероятность без взаимодействия стремится к единице, а вероятность с i -взаимодействием $\rightarrow$ к нулю.

ВВЕДЕНИЕ

Каскадно-вероятностный (КВ) метод разработан нами в процессе многолетней работы в области прикладной математики [1], физики элементарных частиц, физики космических лучей [2, 3], радиационной физики материалов [4, 5] и позитронной физики [6], а также на основе анализа и обобщения этих исследований. В рамках каскадно-вероятностного метода [7] нам также удалось получить аналитическое выражение и рассчитать пороговые энергии смещения для различных элементов.

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть на некоторой переменной глубине x под зенитным и азимутальным углами γ и φ к выбранному направлению (относительно перпендикуляра к поверхности образца или по отношению к зениту) генерирована частица (нуклон, электрон, первично-выбитый атом и т.п.). Наиболее реальным описанием процесса при этом является трехмерная модель распространения частиц в веществе, поскольку траектория движения частиц сильно закручивается в пространстве.

В трехмерной модели уравнение баланса (типа Больцмана) для потока частиц на глубине x запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dN(E, \theta, \varphi, x)}{dx} = & -\frac{N(E, \theta, \varphi, x)}{\lambda(E) \cos \theta} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_E^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta} \int_{\varphi_1}^{\varphi} N(E', \theta', \varphi', x) \times \\ & \times \frac{n(E', E, \theta', \theta)}{\lambda(E') \cos \theta'} dE' d\theta' d\varphi'. \end{aligned} \quad (1)$$

при начальном условии $N(E, \theta, \varphi, x) = N(E, 0)$.

Причем здесь $N(E, \theta, \varphi, x)$ – поток частиц на глубине x ; $dN(E, \theta, \varphi, x) / dx$ – изменение потока излу-

чения в бесконечно-малом слое dx , $\lambda(E)$ и γ – пробег взаимодействия и угол вылета соответственно частицы относительно вертикали после взаимодействия, $n(E', E, \theta', \theta)$ – нормированный дифференциальный энергетический спектр вторичных частиц в элементарном акте, E – энергия частицы.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Найдем решение уравнения (1) в общем виде с помощью преобразования Лапласа. Сделав обратное преобразование Лапласа, найдем оригинал. После соответствующих вычислений получим:

$$N(E, \theta, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(E, \theta, \varphi, x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Y_n(E, \theta, \varphi, x) = & \int_E^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \dots \int_{E_{n-1}}^{\infty} \int_{\theta_{n-1}}^{\theta} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi} N(E_1, \theta_1, \varphi_1, 0) \times \\ & \times \frac{n_p(E_n, E_{n-1}, \theta_n, \theta_{n-1}, \varphi_n, \varphi_{n-1})}{2\pi} \dots \times \\ & \times \frac{n_p(E_1, E, \theta_1, \theta, \varphi_1, \varphi)}{2\pi} \times \\ & \times \psi_n(x, \lambda_0 \div \lambda_n) dE_n d\theta_n d\varphi_n \dots dE_1 d\theta_1 d\varphi_1. \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\psi_n(x, \alpha_0 \div \alpha_n) = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_n \alpha_j^{n-1}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (\alpha_j - \alpha_i)} \exp\left(-\frac{x}{\alpha_j}\right). \quad (4)$$

$$\alpha_n = \lambda_n(E) \cos \theta_n;$$

$$\alpha_i = \lambda_i(E) \cos \theta_i;$$

$$\alpha_j = \lambda_j(E) \cos \theta_j.$$

Как видно из решения (3), в него входит обобщенная каскадно-вероятностная функция (ОКВФ), учитывающая распространение излучения в трехмерном пространстве. Она имеет смысл вероятности того, что частица, генерированная на глубине x' достигнет глубины x , после n числа соударений. Рассмотрим свойства ОКВФ. Введем обозначение:

$$A_{jn} = \frac{\alpha_j^{n-1}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (\alpha_j - \alpha_i)}. \quad (5)$$

Свойство 1. Для всех целых и положительных значений всегда имеем равенство:

$$\sum_{j=0}^n A_{jn} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим $\sum_{j=0}^n A_{jn}$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и т.д. С использованием общего соотношения и выражения для A_{jn} , полученного при $n = 1, 2, 3, 4$ и т.д., можно показать, что эта сумма равна нулю.

Для любого $n \sum_{j=0}^n A_{jn} = 0$ доказывается методом математической индукции.

Свойство 2. Для всех целых и положительных значений $n \geq 1$ выполняется равенство:

$$B_n = \sum_{j=0}^n A_{jn} \alpha_j = 1. \quad (7)$$

Рассмотрим $\sum_{j=0}^n A_{jn} \alpha_j$ при $n = 1, 2, 3, 4$. При $n = 1$ имеем соотношение:

$$B_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}; \quad n = 1.$$

Аналогично записываются выражения для B_2, B_3 и т.д. В результате получим (7).

Свойство 3. Для всех целых и положительных значений $n \geq 1$ всегда выполняется равенство:

$$C_n = \sum_{j=0}^n A_{jn} \alpha_j^2 = \sum_{j=0}^n \alpha_j. \quad (8)$$

Аналогично (7) запишем суммы $\sum_{j=0}^n A_{jn} \alpha_j^2$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

После проведения алгебраических преобразований находим $C_1 = \alpha_0 + \alpha_1$; $C_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$; $C_3 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; $C_4 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Обобщая на случай n -переменных, имеем: $C_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j$.

Воспользуемся методом математической индукции. Запишем формулу для C_{n+1} . Преобразовывая полученные соотношения придем к выражению (8).

Свойство 4. При $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n$ имеем неопределенность функции n -переменных, раскрывая которую, получаем:

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n} \psi_n(h', h, \alpha_0 \div \alpha_n) = \psi_n(h', h, \alpha_0), \quad (9)$$

где

$$\psi_n(h', h, \alpha_0) = \frac{1}{n!} \left(\frac{h - h'}{\alpha_0} \right) \exp \left(- \frac{h - h'}{\alpha_0} \right).$$

Доказательство этого соотношения можно произвести на основе анализа выражения для $\psi_1(h', h, \alpha_0) \div \psi_4(h', h, \alpha_0, \alpha_1 \div \alpha_4)$ и т.д.

Свойство 5. Для любых целых положительных значений $n \geq 0$ всегда выполняется равенство:

$$D_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\infty \psi_n(H, \alpha_0 \div \alpha_n) dH = 0. \quad (10)$$

Подставив в (10) соотношения для $\psi_0(H, \alpha_0)$, $\psi_1(H, \alpha_0, \alpha_1)$, $\psi_2(H, \alpha_0 \div \alpha_2)$, $\psi_3(H, \alpha_0 \div \alpha_3)$, видим, что это выражение выполняется. Для окончательного решения вопроса необходимо воспользоваться общим выражением для $\psi_n(H, \alpha_0 \div \alpha_n)$.

Свойство 6. Для любых целых положительных значений выполняется равенство:

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_0^\infty H \psi_n(H, \alpha_0 \div \alpha_n) dH = \sum_{j=0}^n \alpha_j. \quad (11)$$

Подставляя выражения для $\psi_0(H, \alpha_0)$, $\psi_1(H, \alpha_0, \alpha_1)$, $\psi_2(H, \alpha_0 \div \alpha_2)$, $\psi_3(H, \alpha_0 \div \alpha_3)$ в (11), убеждаемся, что равенство (11) справедливо.

Свойства 4–6 вероятностной функции имеют определенный физический смысл. Например, при проходе ионов через вещество указанные выше соотношения описывают общий случай их взаимодействия, а (9) – при условии, что ион после взаимодействия сохраняет направление своего движения. Соотношение (10) свидетельствует о том, что сумма вероятностей (взаимодействий) того, что частица пройдет глубину $H = h - h'$, равна 1, т.е., она достигнет обязательно какой-то глубины H ($0 \leq H \leq \infty$) с вероятностью 1. Формула (11) показывает, что среднее расстояние, которое проходит частица, равна сумме полных средних пробегов взаимодействия этой частицы.

Выводы

1. Показано, что обобщенная каскадно-вероятностная функция может быть получена из с трехмерного уравнения Больцмана. Решение ведется методом преобразования Лапласа.

2. Рассмотрены физические свойства ОКВФ, которые имеют определенный физический смысл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A. at al. Analysys of cascade-probabilistic functions taking into account the energy losses in the case of charged particles // Modelling, Measurement & Control, A, AMSE. – 1994. – Vol. 55, № 2. – P. 49-55.
2. Efimov A.K., Kolomeets E.V., A.I., Boos E.G at al. Calculation of the coupling coefficient for cosmic ray muon and neutron component // Proc. 13-th Int. conf. of Cosmic Rays. – Denver. – 1973. – Vol. 2. – P. 863–868.
3. Байсакалова А.Б., Богданова О.А., Исаков Т.З. и др. Генерация протонов, нейтронов и электронов на Солнце // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1975. – Т. 39, № 2. – С. 264–271.
4. Купчишин А.И., Купчишин А.А., Шмыгалева Т.А. и др. Каскадно-вероятностный метод. Решение радиационно-физических задач, уравнений Больцмана. Связь с цепями Маркова / Монография. – Алматы. Изд. КазНПУ им. Абая, ТОО Кама, НИИ НХТМ КазНУ им. аль-Фараби, 2015. – 388 с.
5. Voronova N.A., Kirdyashkin V.I., Gyngazov V.A. at al. Computer simulation radiation damages in condensed matters // IOP Conf. Series: Material Science and Engineering 110 012039. – 2016. – P. 1–4.
6. Kupchishin A.I., Kupchishin A.A., Voronova N.A. at al. Positron sensing of distribution of defects in depth materials // IOP Conf. Series: Material Science and Engineering 110 012040. – 2016. – P. 1–4.
7. Kupchishin A.I., Kupchishin A.A. Dynamic model of the threshold displacement energy // IOP Conf. Series: Material Science and Engineering 110 012040. – 2016. – P. 1–4.

БӨЛШЕКТЕР АҒЫНЫ ҮШІН ЖАЛПЫЛАНҒАН КАСКАДТЫ-ЫҚТИМАЛДЫҚ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ БОЛЬЦМАН ТЕҢДЕУІМЕН БАЙЛАНЫСЫ

¹⁾ Н.А. Воронова, ^{1,2)} А.И. Купчишин, ²⁾ Т.А. Шмыгалева, ¹⁾ В.И. Кирдяшкин, ¹⁾ А.А. Купчишин

¹⁾ *Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*

²⁾ *ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*

Жалпыланған каскадты-ықтималдық функциясы (ЖКЫФ) жүргізетін қарапайым әрекеттің үш өлшемді үлгісінде бөлшектерге арналған каскадтық процестің интегралды-дифференциалдық теңдеулері үшін аналитикалық шешім алынады (атомдар сындырылған және т.б.). Лаплас трансформациясыдан кейін теңдеу интегралға өтеді, содан кейін дәйекті жақындаулар әдісі арқылы шешіледі. Бұл функцияның негізгі физикалық қасиеттері белгіленеді. Соқтығысқаннан кейін өзара әрекеттесу жолының тұрақтылығы мен бөлшектердің кету бұрышы ЖКЫФ қарапайым КЫФ-на ауысады. Таяз тіркеу тереңдігінде бөлшектердің осы тереңдіктің өту ықтималдығы нөлге тең болады (екі қақтығыстарсыз және өзара әрекеттесу кезінде). Үлкен тереңдікте бұл ықтималдықтар нөлге тең. Үлкен і ЖКЫФ Стирлинг түріндегі формулаға өтеді. Өзара іс-қимыл жүгірісі ұлғайған кезде әсерлесусіз ықтималдығы бірге ұмтылады, і-өзара әрекеттесу ықтималдығы нөлге тең.

GENERALIZED CASCADE-PROBABILITY FUNCTION FOR HOUR-TIME FLOWS AND ITS CONNECTION WITH THE BOLTZMAN EQUATION

¹⁾ N.A. Voronova, ^{1,2)} A.I. Kupchishin, ²⁾ T.A. Shmygaleva, ¹⁾ V.I. Kirdyashkin, ¹⁾ A.A. Kupchishin

¹⁾ *Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan*

²⁾ *Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*

An analytical solution is obtained for the integro-differential equation of a cascade process for particles (knocked out atoms, etc.) in a three-dimensional model of an elementary act, into which a generalized cascade-probability function (GCPF) leads. It is shown that after the Laplace transformation, the equation passes into an integral one, which is then solved by the method of successive approximations. The basic physical properties of this function are established. With the constancy of the path to the interaction and the angle of departure of the particle after the collision, the GCPF goes into the simplest CPF. With small depths of registration, the probability that a particle will pass this depth tends to zero (both without collisions and when testing *i* interactions). At greater depths, these probabilities tend to zero. With a large *i* GCPF goes into a Stirling type formula. As the interaction path increases, the probability without interaction tends to unity, and the probability with *i*-interactions tends to zero.